

# 一种基于非周期卷积反演模型的 计算机图象恢复算法

史东承 邹宽城 胡明

(吉林工学院计算机与电子工程系, 长春 130012)

**摘要** 首先描述了非周期卷积反演矩阵模型, 其核矩阵是一个高阶矩阵, 它无法直接用最大熵算法在一般的计算机上解决较大尺寸的图象恢复问题. 针对这一问题, 该文给出了一种利用 FFT 和 IFFT 的非周期卷积反演矩阵求解的计算公式, 从而解决了核矩阵的存储问题, 在该公式下, 利用共轭斜量算法可以提高迭代计算求解的收敛速度. 实验结果表明, 该算法不仅可以在一般的 PC 计算机上实现最大熵图象恢复算法, 而且其计算量和存储设备量要求适中, 适用于多种原因产生的图象模糊问题.

**关键词** 最大熵算法 图象恢复 非周期卷积反演

中图分类号: TP391.41 文献标识码: A 文章编号: 1006-8961(2000)04-0318-05

## A Computer Image Restoration Algorithm Based on the Aperiodic Model of Deconvolution

SHI Dong-cheng, ZOU Kuan-cheng, HU Ming

(Department of Computer & Electronics Engineering, The Institute of Technology of Jilin, Changchun 130012)

**Abstract** In this paper, the aperiodic matrix model of deconvolution is described firstly, whose kernel matrix is a high order matrix. It's difficult to calculate this large matrix in practical image restoration problem directly by maximum entropy algorithm at a common computer for larger image. Second in this paper, we show a kind of deconvolution for overcoming the store problem of kernel matrix and use the conjugate gradient algorithm for the iterate convergence problem. The experimental results show its total computational burden and the memory requirement are moderate. It can run on a common PC and is suitable for many kinds of image blurring.

**Keywords** Maximum entropy, Image restoration, Aperiodic deconvolution

## 0 引言

许多图象处理技术在实际应用中都要求有较高质量的输入图象, 但目前由于传感器的非线性和器件物理特性的限制, 我们只能得到原始物体在二维平面上投影图象的近似. 另一方面, 观察到的图象又往往受到各种因素的影响, 如: 长时曝光下大气湍流对卫星遥感图象的损坏. 摄像机与被摄物体间的相对运动, 光学系统的散焦及各种噪声等, 使我们只能得到原图象的破损版本. 设  $x(i, j)$  是原始图象, 并

且  $h(i, j)$  是点扩散函数(PSF-Point Spread Function), 则一般情况下观察图象  $y(i, j)$  是  $x(i, j)$  和  $h(i, j)$  的卷积, 可表示为:

$$y(i, j) = \sum_{k_1} \sum_{k_2} x(k_1, k_2) * h(i - k_1, j - k_2) + n(i, j) \quad (1)$$

其中  $n(i, j)$  是加性随机噪声.

图象恢复问题就是在已知模糊图象  $y(i, j)$  和点扩展函数  $h(i, j)$  (或未知  $h(i, j)$ ) 的条件下, 求解原始图象  $x(i, j)$  的问题. 图象恢复的最大熵算法由 Frieden<sup>[1]</sup> 首次提出, 但由于该算法基于一组高阶非



$$H(x) = - \sum_{i=1}^M \sum_{j=1}^N x(i,j) \ln x(i,j) \quad (8)$$

式(2)的残余定义为

$$Q(x) = 0.5(F_h x - y)^T D(F_h x - y) \quad (9)$$

式中,  $D = \text{diag}(1/\sigma_1^2, \dots, 1/\sigma_{l_1 \times l_2}^2)$ , 其中  $\sigma_i^2$  是象素  $i$  的噪声方差, 此时图象恢复的最大熵算法可描述为:

$$\max J(x, \mu, \lambda) = H(x) + \mu \sum \sum x(i,j) - \lambda Q(x) \quad (10)$$

式(10)是一个约束最大化问题, 可以转化为求解如下微分方程问题

$$\nabla^2 J(x, \mu, \lambda) dx/d\lambda = \nabla Q(x), 0 \leq \lambda < \infty \quad (11)$$

式(11)就是微分方程理论中的 Cauchy 问题. 对于 Cauchy 问题可以用如下离散迭代算法来完成<sup>[3]</sup>:

迭代初始条件为

$$x^0 = \exp(\mu - 1)e$$

此处  $e = [1, 1, 1, \dots, 1]^T_{l_1 \times l_2}$  为单位向量, 并且  $M = l_1 \times l_2$ .

迭代过程为

$$(V^k + \lambda_k F_h^T D F_h)(x^{k+1} - x^k) = -(\lambda_{k+1} - \lambda_k) F_h^T D(F_h x^k - y) \quad (12)$$

在式(12)中  $V^k = \text{diag}[1/x_1^k, \dots, 1/x_M^k]$ ,  $\lambda_{k+1} = \lambda_k + \Delta\lambda$ , 并  $\lambda_0 = 0$ .

定义  $G_k = V^k + \lambda_k F_h^T D F_h$ , 并称其为系数矩阵.

系数矩阵  $G_k$  是一个正定对称矩阵. 利用 Gauss-Seidel 迭代算法可以有效地计算式(12)的另一种形式, 即式(13).

$$G_k^* x^{k+1} = (2\lambda_k - \lambda_{k+1}) F_h^T D F_h x^k + e + (\lambda_{k+1} - \lambda_k) F_h^T D y \quad (13)$$

对于一个  $256 \times 256$  的灰度图象, 系数矩阵  $G_k$  含有  $256^4 = 4.295E9$  个元素, 尽管  $G_k$  具有对角结构, 它仍然需要较大的存储空间和大量的计算时间.

### 3 基于非周期卷积反演矩阵模型的最大熵图象恢复算法及其实验结果

为了对式(12)更有效地求解, 下面给出另一种离散迭代过程的计算方法, 称为非周期卷积反演矩阵模型的最大熵图象恢复算法. 将式(12)重写如下:

$$G_k \Delta x = a_k \quad (14)$$

其中,

$$\Delta x^k = x^{k+1} - x^k, \\ a_k = -(\lambda_{k+1} - \lambda_k) F_h^T D(F_h x^k - y)$$

计算此式将分别调用式(6)和式(7).

取  $p_0 = a_k, \Delta x_0 = 0$  作为初始条件, 沿着方向  $p_0 = a_k$  和  $p_i, i = 1, 2, \dots$  进行  $J(x, \mu, \lambda)$  的最大化搜索使  $G_k$  满足共轭条件, 共轭条件由下式给出.

$$p_i^T G p_j = 0, j = 0, 1, 2, \dots, i - 1 \quad (15)$$

利用式(14)及共轭斜量法可以求解出  $\Delta x$ , 其中  $a_k$  和  $G_k \Delta p$  可以由式(6)和式(7)计算.

总的基于共轭斜量法的最大熵图象恢复算法如下:

```

Start: 输入 y, h; 分析 σ, 置 λ= 0; 估计 x= x0;
      选择适当的 Δλ, 并计算 H = FFT(h); 用式(9)计算 Q(x);
While (Q(x) - L/2) < delta1) do
  λ= λ+ Δλ; 按式(6)和(7)用 FFT 和 IFFT 算法计算式(14)中的 ak;
  (用共轭斜量算法求解(14)式中的 Δx)
  beta= 0; Δx= [0]; r= ak; p= r;
  While(|r| > delta2) do
    p= r+ beta• p;
    用 FFT 和 IFFT 算法计算 Gk• p 和 pT• Gk• p;
    alpha= rT• r/(pT• Gk• p);
    Δx= x+ alpha• p;
    r0= r; r= r0- alpha• Gk• P;
    beta= rT• r/(r0T• r0);
  End while
  x= x+ Δx; 计算 Q(x);
  If(Q(x) > L1× L2/2) Then Δλ= |Δλ|
  Else Δλ= -|Δλ| End If
End While
    
```

End Start

在实验模拟过程中, 设

$$x^0 = \left| \sum \sum y(i,j) / (L_1 \times L_2) \right| e$$

并取  $\Delta\lambda = 0.01$ , 又取高斯型点扩展函数的大小为  $6 \times 6$ . 对于  $256 \times 256$  灰度 Lenna 图象进行了模拟计算, 图 1 是由高斯型点扩展函数与原始图象卷积后并加有 20dB 加性白噪声的降质模糊图象, 图 2 是用本文给出算法在一般的 PC 计算机上求解后得到的恢复结果. 在模拟计算实验中, 外层计算进行了 17 次, 内层迭代低于 11 次不等.

在上边给出的算法中, 存储矩阵变量  $x, r, a_k, p, \Delta x, H$  所需的存储代价为  $256 \times 256 \times 6$  byte, 由于采用式(6)和式(7)进行计算, 不用直接存储  $G_k$  (存储量需求为  $256^4$  byte) 而是存储中间矩阵, 共需  $256 \times 256 \times 2$  byte, 总的存储器需要量为  $8 \times 256^2$  byte,

远远小于直接存储非周期卷积反演模型的核矩阵  $F_h$  或周期卷积反演矩阵模型的核矩阵  $C_h$  所需要的存储代价 ( $256^4$  byte). 在计算量方面, 上述算法的一次内层迭代的乘法计算量为进行一次  $256 \times 256$  点的 FFT 和 IFFT 及计算  $r^T r$  所需的  $256 \times 256$  次乘法的计算量, 其计算代价总的乘法次数为  $K \times 256 \times 256$  次, 其中  $K$  为一个常数. 而直接卷积计算的乘法次数将高于  $256^4$  次. 因此本文给出的算法总的计算量和存储器需要量比较适中.

对于初始条件  $\Delta\lambda$  的选择, 必须经过一定的测试计算. 如果  $\Delta\lambda$  的选择太小, 图象恢复过程比较慢, 如果  $\Delta\lambda$  选择太大, 在迭代的后期可能出现迭代震荡情况, 即  $\Delta\lambda$  与迭代次数或计算精度有关. 对  $\Delta\lambda$  的选取一般在  $1.0E-5$  以上就可以满足要求; 对于  $\Delta\lambda$  的选取将与图象的尺寸有关, 同时与  $Q(x)$  的变化情况有关.

图 3 给出了  $Q(x)$  的变化情况曲线. 从图中不难看出当迭代次数大于一定次数时,  $Q(x)$  的变化开始缓慢. 因此一般情况下对于  $256 \times 256$  的灰度图象, 外层迭代次数和图象恢复结果是否满足要求将与

$\Delta\lambda$  的选择有关. 在图 3 中, 曲线 a 是在  $\Delta\lambda=0.001$  时的收敛情况, 此时收敛太慢; 曲线 b 是在  $\Delta\lambda=0.004$  时的收敛情况; 曲线 c 是在  $\Delta\lambda=0.01$  时的收敛情况, 此时收敛较快, 外层迭代在 15 次以内即可达到一定要求.

为了进一步研究在相对小一点的图象上该算法的性能, 本文给出了  $128 \times 128$  点灰度图象的计算结果. 当初始条件取 0.01 时, 其内层迭代低于 10 次不等, 外层迭代计算进行了 20 次. 降质图象按如下方法产生: 在原始 Lenna 图象上取以点 [75, 75] 为左上角第一点的一个  $128 \times 128$  大小的子图象, 子图象与  $6 \times 6$  的点扩散函数进行卷积处理生成  $133 \times 133$  大小的模糊图象, 对模糊图象加上 20dB 白噪声后产生最终的降质图象 (如图 4 所示). 用本文算法产生的恢复图象如图 5 所示. 在计算过程中  $Q(x)$  的变化情况如图 6 所示. 由图 6 可知, 在  $128 \times 128$  点图象上, 外层计算进行了 15 次左右可满足基本要求. 对比图 1 和图 2 及图 3 和图 4 可以看出, 由本文提出的算法恢复的图象信噪比得到明显的改善, 恢复出的图象质量优于原模糊图象.



图 1



图 2

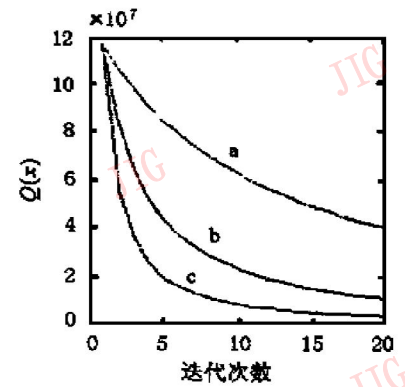


图 3



图 4



图 5

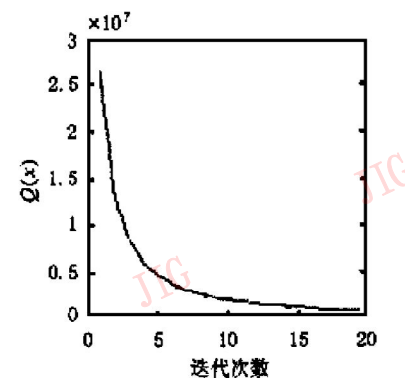


图 6

## 4 结 论

本文提出了基于共轭斜量法的最大熵图象恢复算法. 该算法简洁明了, 利用 FFT 和 IFFT 对卷积式(6)和式(7)进行计算, 从而解决了对矩阵  $F_h$  的存储问题, 回避了高阶矩阵的计算问题. 由于采用快速傅立叶变换算法代替大型矩阵计算, 使计算速度有所提高, 计算量也相对减少. 在迭代求解过程中, 使用基于变分法的共轭斜量法求解高阶线性方程组, 提高了求解过程的收敛速度. 本文提出的算法可用于多种模糊图象的恢复问题, 算法与图象模糊产生的原因无关, 并适合模糊图象中存在加性噪声的情况, 可应用于较大尺寸的图象和一般尺寸的图象, 并可用一般的 PC 计算机完成图象的恢复工作. 总的计算量和存储量适中. 且灰复出的图象质量较好.

### 参 考 文 献

- 1 Frieden B R. Restoring with maximum likelihood and maximum entropy. J Opt Soc Am, 1972, 62: 511~ 518.
- 2 Burch S F, Gull S F, Skilling J K. Image restoration by a powerful maximum entropy method. Computer Vision, Graphics, and Image Processing, 1983, 23: 113~ 128.
- 3 Zhuang X, Haralic R M, Zhao Y. Maximum entropy image restoration. IEEE Trans Image Proc, 1991, 39(6): 1478~ 1480.

- 4 Zou M Y, Unbehauen R, Lai X C. A maximum entropy restoration algorithm using the aperiodic model of deconvolution. Proceeding of IEEE. ICNNSP'95, Nanjing, 1995, 1352~ 1357.



**史东承** 1959年生, 1982年毕业于北京邮电大学电信工程系取得学士学位, 1988年于东北电力学院取得硕士学位. 现任吉林工学院计算机与电子工程系信息技术教研室主任, 副教授. 主要研究方向: 图象处理与机器视觉、数字信号处理、神经网络、多媒体通信.



**邹宽城** 1943年生, 吉林工学院计算机与电子工程系主任, 教授. 主要从事图形与图象处理、可视化计算研究.



**胡明** 1962年生, 吉林工学院计算机与电子工程系计算机应用教研室主任, 副教授. 主要研究方向为图象处理与人工智能、多媒体数据库、知识挖掘.